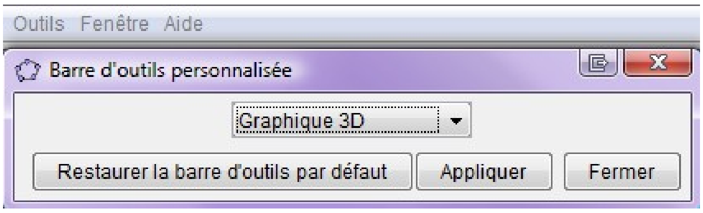
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ET GeoGebra

INTRODUCTION ET CRÉATION DE SOLIDES

La prochaine version de GeoGebra (5.0) intégrera la géométrie dans l'espace.
Une version béta est téléchargeable à partir du forum du site geogebra.org, section Beta Tests/GeoGebra 5.
lien direct : http://download.geogebra.org/installers/5.0/?C=M;O=D → sélectionner la version portable correspondant à votre système d'exploitation.

<u>Premières constructions</u>

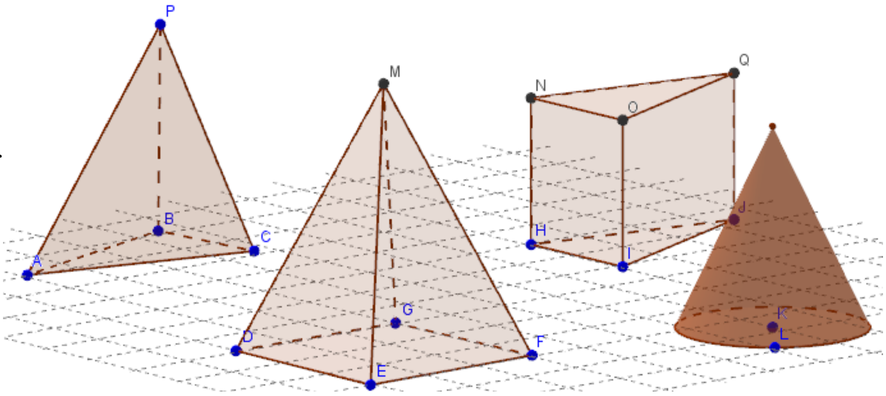


• Ouvrir GeoGebra 5.0 Beta.
• *Si nécessaire [c'est-à-dire si une mise à jour du logiciel a ajouté des icônes depuis votre téléchargement de l'appli], mettre à jour la barre d'outils 3D : menu Outils/Barre d'outils personnalisée → Sélectionner Graphique 3D puis cliquer sur Restaurer, Appliquer et Fermer.*

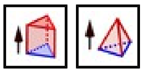
• Utiliser la barre de style de la fenêtre graphique 3D pour faire apparaître la grille, effacer les axes, afficher ou non les contours de la « boîte de visualisation » :

• Ouvrir à côté de la fenêtre 3D une fenêtre graphique 2D
• Construire quelques polygones et cercles en utilisant une fenêtre ou l'autre. Les figures tracées apparaissent dans les deux fenêtres.
• Dans la fenêtre 3D, construire un point P. P est déplaçable dans les 3 dimensions. En cliquant sur P, faites alterner les flèches de direction autour du point et déplacez P au-dessus de l'un de vos polygones.

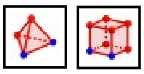
• Utiliser l'icône Pyramide  et sélectionner un polygone puis le point P pour créer la pyramide.

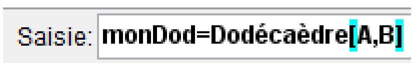


• Les solides peuvent aussi être créés par extrusion d'un polygone ou cercle de base :
- soit en cliquant sur la figure plane puis en indiquant une hauteur ;
- soit par un clic-glissé jusqu'à la hauteur désirée.



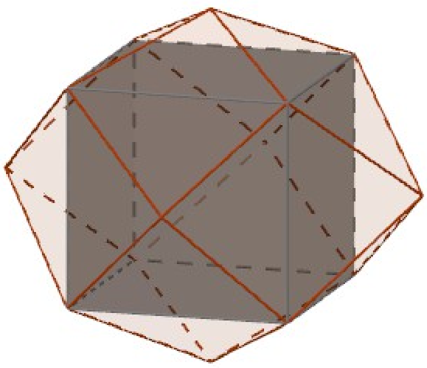
D'autres solides peuvent être construits à partir de la barre de saisie, comme les solides de Platon :

• Créer deux points A et B dans une fenêtre 3D
• Pour construire un dodécaèdre par exemple →
• Tétraèdre et cube sont directement accessibles par les icônes : 



L'extrusion n'est pas limitée à l'axe (Oz) et peut être réalisée perpendiculairement à n'importe quel plan.

• A partir d'un cube central, extrudez 6 pyramides :

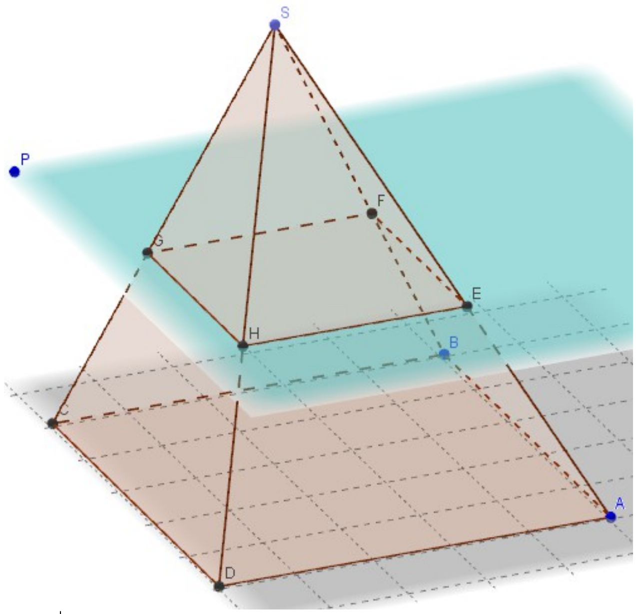


SECTION D'UN SOLIDE PAR UN PLAN
EXEMPLE D'UNE PYRAMIDE À BASE CARRÉE

Le passage de la fenêtre 3D à la visualisation 2D d'un plan quelconque de la figure rend l'étude des sections très aisée.

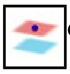
Dans une fenêtre graphique 3D, afficher le plan de base (dans GeoGebra ce plan est désigné par : PlanxOy).

Construire une pyramide ABCDS à base carrée.

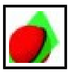


Construire un point P non compris dans le plan de base.

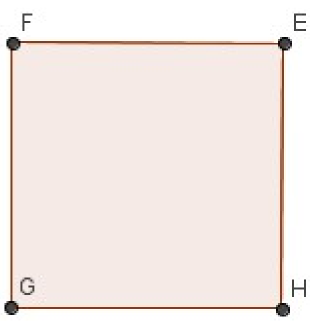
Construire un plan passant par P et parallèle au plan de base :

Icône  ou commande :Plan[P,PlanxOy]).

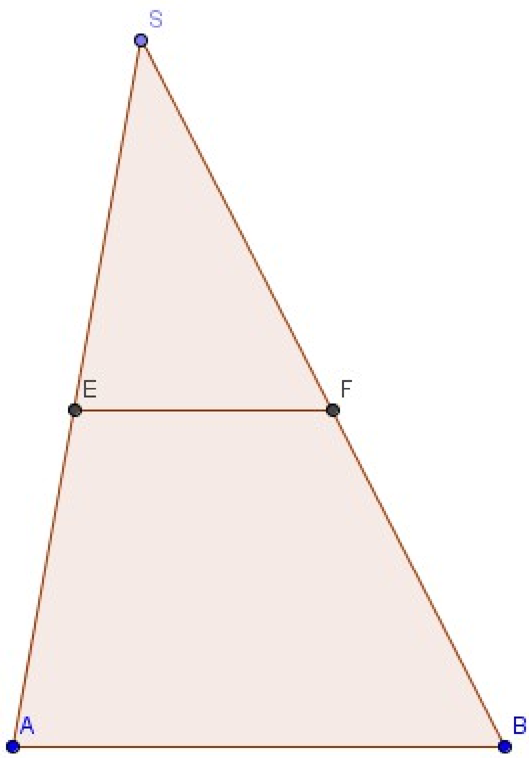
Construire la section de la pyramide par le plan :

 ou IntersectionRégions[pyramide, plan]

Pour étudier la nature de la section, sélectionner le plan de coupe ou le polygone de section d'un clic droit et sélectionner : Afficher comme vue 2D.

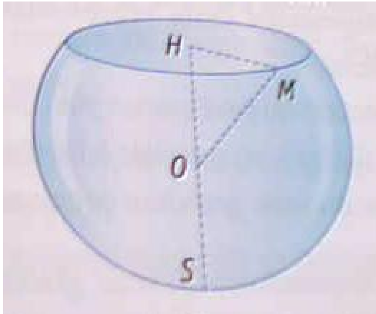


Pour étudier la relation entre la longueur d'un côté de la section et le carré initial, sélectionner la face SAB et l'afficher dans une seconde vue 2D.



Dans la fenêtre 3D, modifiez la hauteur de P.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME :
L'AQUARIUM



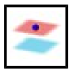
Le problème

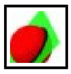
Un fabricant réalise des aquariums sphériques en plastique.

Le diamètre d'un aquarium est de 20 cm et il souhaite que le diamètre de l'ouverture soit de 10 cm.
A quelle hauteur du centre de l'aquarium faut-il couper la sphère pour obtenir ce diamètre d'ouverture ?

Étude avec GeoGebra

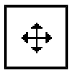
1. Ouvrir GeoGebra 5.0. Afficher la grille et le plan de base : utiliser la barre de style
2. Placer le centre O de l'aquarium sur ce plan.
3. Saisir la commande : `Sphère[O,r]` en remplaçant r par le rayon de l'aquarium.
   Dézoomer l'image si nécessaire.
4. Créer une droite perpendiculaire au plan et passant par le point O. Placer un point H sur cette droite.
5. Construire un plan, parallèle au plan de base et passant par H.
   (vous pouvez ensuite cacher le plan de base et la grille)
6. Construire la section de la sphère par le plan passant par H. Quelle est la nature de cette section ?





…...

7. Sélectionner le plan de coupe (à l'aide d'un clic droit) et demander son affichage dans une fenêtre 2D.
   Il peut être nécessaire de déplacer l'image pour voir la section.
8. Dans cette fenêtre, tracer un rayon [HM] de la section et afficher sa longueur.
9. Dans la fenêtre 3D, déplacer le point H pour que l'on obtienne le rayon de section désiré.
   Quelle est alors la longueur OH ?



…...

Recherche de la longueur exacte OH, par calcul

1. Construire dans la fenêtre 3D le triangle OHM.
   Afficher ce triangle dans une seconde fenêtre graphique 2D.
2. Quelle est la nature du triangle OHM ?

…...

3. Quels sont les côtés de ce triangle dont on connaît la longueur exacte ?

…...

4. Effectuer ci-dessous le calcul exact de la hauteur à laquelle on doit couper l'aquarium.

…...

…...

…...

…...

…...

…...

…...

…...

…...

…...

FABRICATION DES BOULES DE PÉTANQUE

Partie I – Vraiment pleine ?

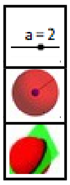
1. Rappeler la différence mathématique entre une sphère et une boule.
2. On considère une boule de pétanque de diamètre $d = 8\ cm$ et de masse $m = 700\ g$. (Il existe des boules de diamètres et masses différents, selon les préférences des joueurs)
   a – Quel est le volume de cette boule ?
   b – Sachant que la masse volumique de l'acier utilisé pour sa fabrication est de 7,85 g/cm^3, démontrer que cette boule de pétanque n'est pas une boule au sens mathématique du terme.

Partie II – Recherche de l'épaisseur du métal

À l'aide du logiciel GeoGebra, étudier la masse de la boule de pétanque en fonction de l'épaisseur d'acier qui la constitue. Déterminer, à 1 mm près l'épaisseur d'acier qui constitue la boule de la question 2.

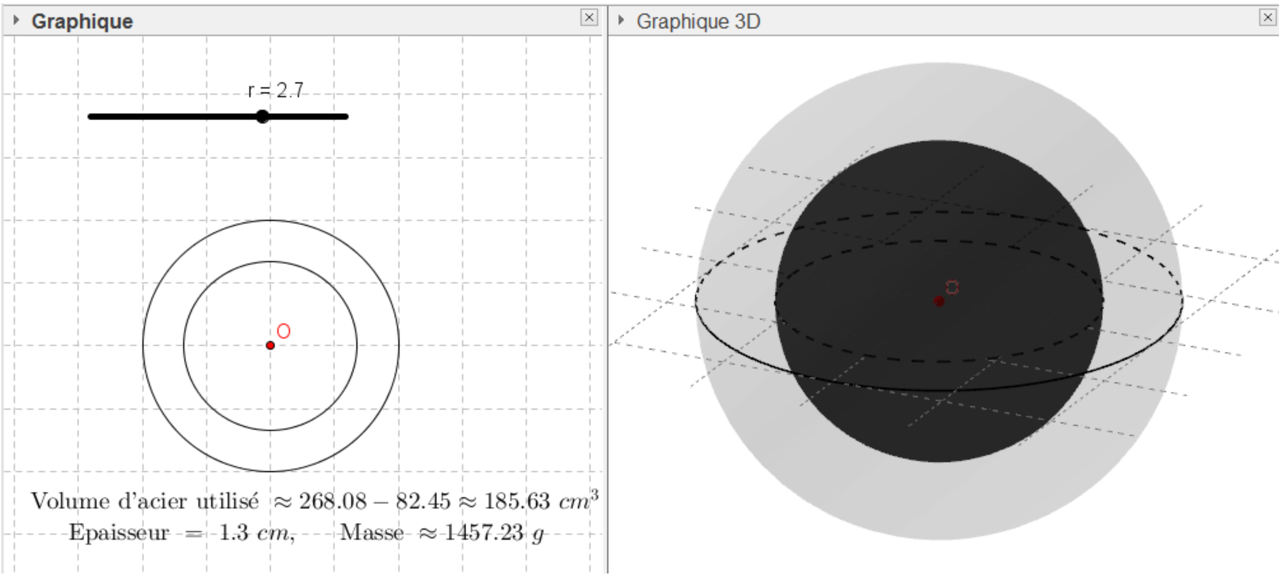
Comment s'y prendre ?

Il faut tout d'abord créer deux sphères pour représenter la surface intérieure et la surface extérieure de la boule de pétanque.



- Ouvrir côte à côte une fenêtre graphique 2D et une fenêtre 3D ;
- Créer (dans la fenêtre 2D) un curseur *r* pouvant varier de 0 à 4 pour représenter le rayon de la sphère intérieure ;
- Placer un point O représentant le centre de la boule de pétanque ;
- Créer une sphère de centre O et de rayon *r* ;
- Créer une seconde sphère, de centre O et de rayon 4.
- On peut représenter une section 2D de la boule de pétanque en demandant d'afficher l'intersection de chacune des sphères avec le plan de base de la fenêtre 3D.

À partir du volume de chacune des sphères,
calculer et afficher le volume d'acier, l'épaisseur et la masse de la boule de pétanque.



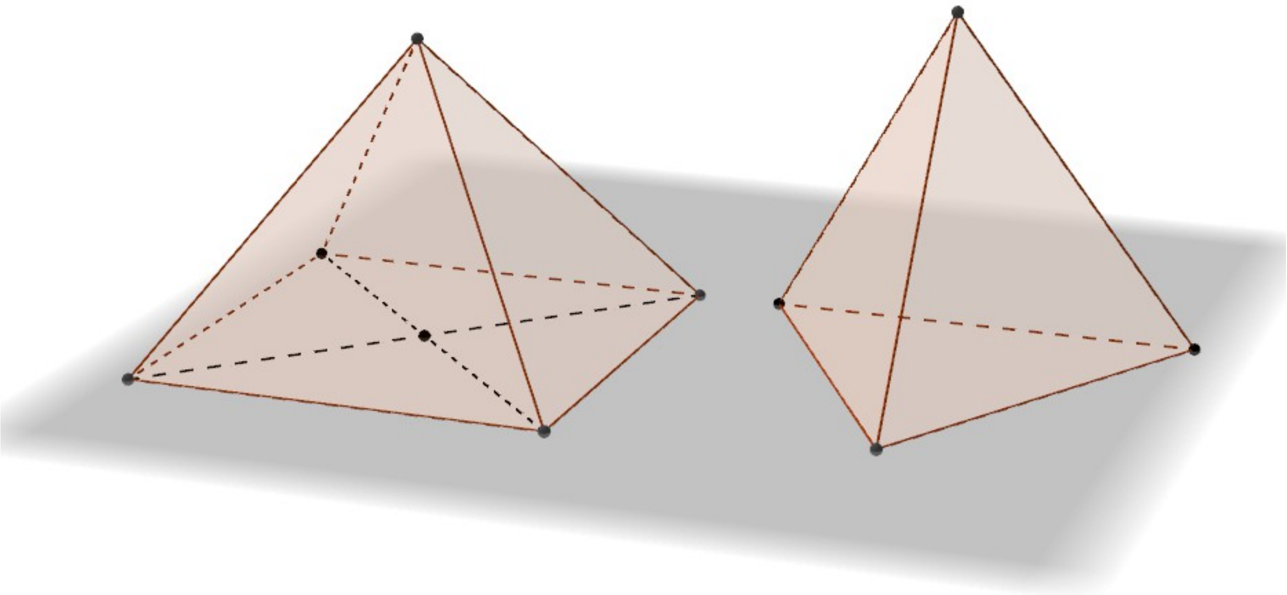
Partie III – La fabrication

Le schéma ci-contre montre comment on fabrique une boule de pétanque à partir d'une barre d'acier.

La barre d'acier utilisée a un diamètre de 4 cm.
Calculer la hauteur du lopin pour qu'il ait le volume d'une demi-boule de pétanque.

SOLIDES ET PATRONS :
Deux pyramides réunies

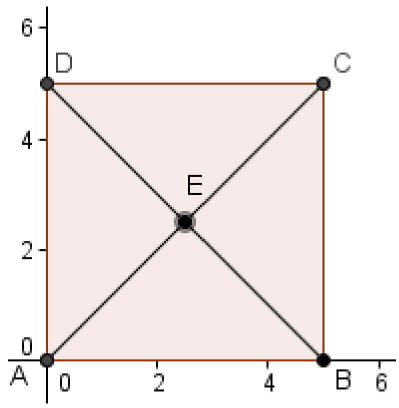
On souhaite étudier le solide que l'on obtient si on assemble les deux pyramides présentées ci-dessous :



Premier solide : une pyramide régulière à base carrée
Second solide : un tétraèdre régulier (quatre faces équilatérales)

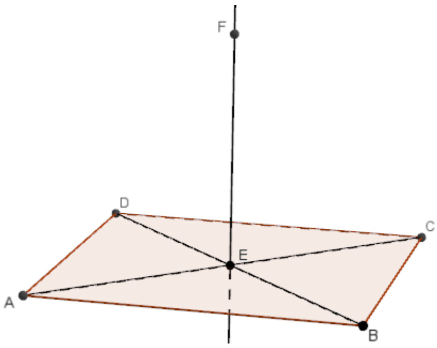
Toutes les arêtes de chacun de ces solides doivent mesurer 5 cm.

Étude à l'aide de GeoGebra



Construction de la pyramide à base carrée :

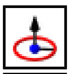
- Placer deux points A et B distants de 5 cm, construire un carré ABCD et E le point d'intersection de ses diagonales.



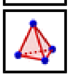
- Dans la fenêtre de géométrie 3D, construire la droite perpendiculaire au plan de base, passant par le point E.
- Placer sur cette droite un point F, approximativement à 5 cm de A (on pourra afficher la longueur AF)

Quelle figure peut-on construire pour placer ce point avec exactitude ?

- Effacer le point approximatif F.

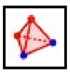


- Construire un cercle de centre A et de rayon 5 (cliquer sur le segment [BD] pour indiquer une direction perpendiculaire au cercle).



- Placer un point G situé à exactement 5 cm de A puis construire la pyramide de base ABCD et de sommet G.

Assemblage du tétraèdre régulier :



- Pour coller le tétraèdre à la pyramide, cliquez sur la face ABG puis sur les sommets A et B.

- Cacher le cercle tracé et la hauteur de la pyramide pour ne garder que les solides visibles. Enregistrer la construction.

- Changer le point de vue pour observer la figure sous divers angles.

Que remarque-t-on ? (En particulier pour les points A, B, G et le sommet de tétraèdre)

Construction du solide

Décrire les faces de chacune des pyramides : nature et nombre de faces

Pyramide à base carrée	Tétraèdre

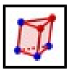
- Sur feuille blanche, construire un patron pour chacune de ces pyramides.
- Découper, plier, coller, assembler !

La conjecture réalisée avec GeoGebra semble-t-elle être toujours vraie ?

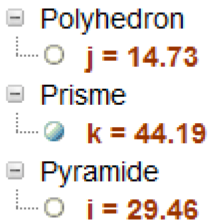
Observer le solide obtenu, décrire ses faces. Quel nom donneriez-vous à un solide de cette nature ?

Le solide en un seul patron

- Reprendre la construction réalisée avec GeoGebra.



- Construire le prisme rassemblant les deux solides en choisissant le triangle CDG comme base et le point B comme sommet.
- Cacher chacune des deux pyramides initiales pour ne laisser affiché que le prisme. Le plus simple est de les décocher dans la fenêtre *Algèbre*) →



- Construire le patron du prisme.

Pour observer le patron de face, faire un clic droit sur sa face CDG puis sélectionner *Afficher comme vue 2D*.

Pour les plus rapides : construisez ce patron sur feuille blanche.

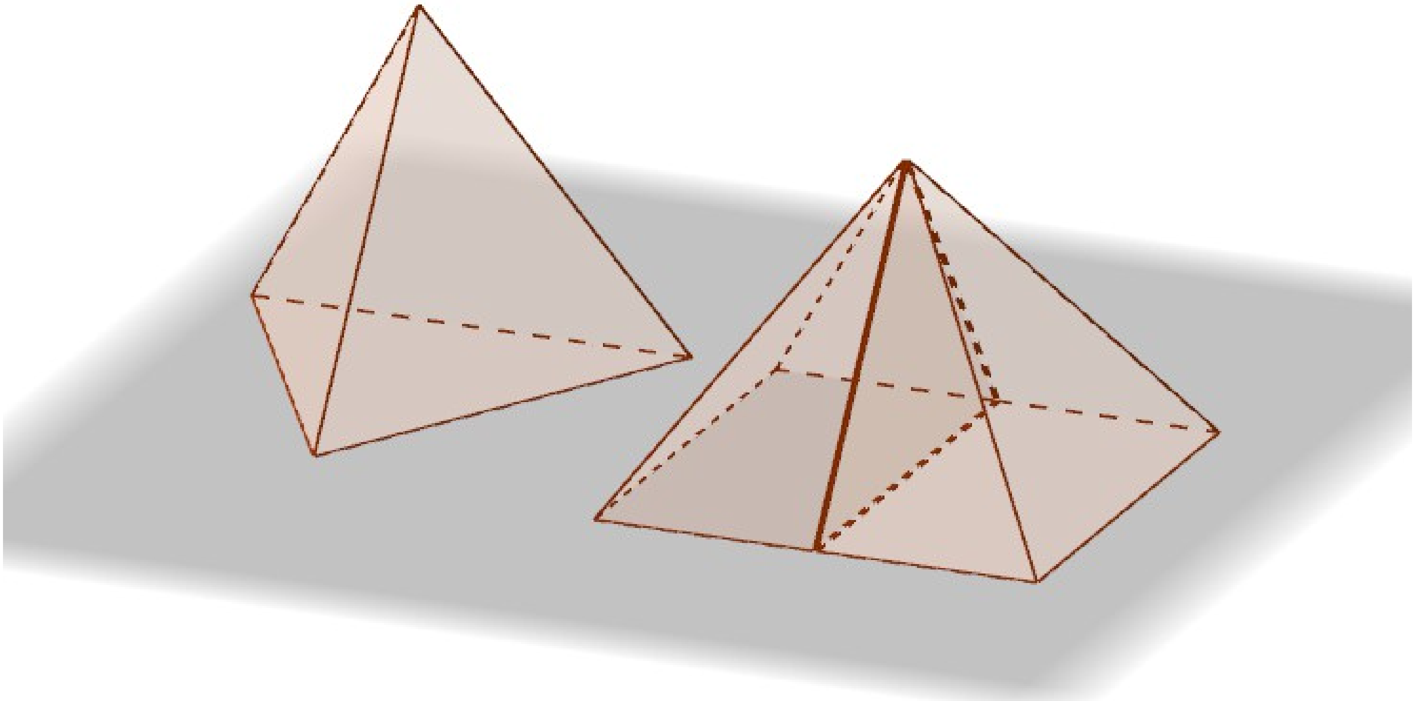
Remarque pour le professeur :

L'outil Patron crée automatiquement un curseur variant de 0 à 1.
Ce curseur est accessible à partir de la fenêtre Algèbre*.*
En rendant ce curseur visible, vous pouvez modifier le degré d'ouverture du patron ou l'animer.

Une version plus difficile de cette activité est présentée à la page suivante.

SOLIDES ET PATRONS :
Trois pyramides réunies

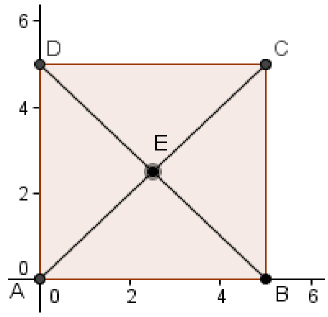
On souhaite étudier le solide que l'on obtient si on assemble les trois pyramides présentées ci-dessous :



Premier solide : un tétraèdre régulier (quatre faces équilatérales)
Deuxième et troisième solides : une pyramide régulière à base carrée, coupée au milieu de sa base

Toutes les arêtes du tétraèdre et de la pyramide à base carrée doivent mesurer 5 cm.

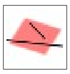
Étude à l'aide de GeoGebra



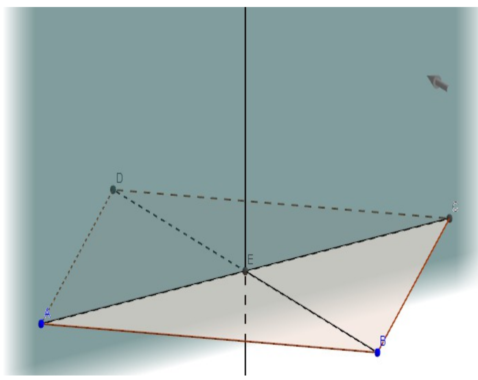
Construction de la pyramide à base carrée coupée en deux :

- Placer deux points A et B distants de 5 cm, construire un carré ABCD et E le point d'intersection de ses diagonales.

- Dans la fenêtre de géométrie 3D, construire la droite perpendiculaire au plan de base, passant par le point E.

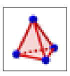


- Créer le plan contenant les droites (AC) et la perpendiculaire tracée.
- Afficher ce plan dans une vue 2D (clic droit sur ce plan puis *Afficher comme vue 2D*).



Quelle figure peut-on construire dans ce plan pour placer le sommet F de la pyramide avec exactitude ?

Une fois F construit, vous pouvez fermer la vue 2D.
- Construire les milieux respectifs G et H des segments [BC] et [AD] puis les quadrilatères ABGH et CDHG.



- Construire la pyramide de base ABGH et de sommet F.

- Construire le patron de cette pyramide.

- Enregistrer votre figure.

Construction du solide

Décrire les faces de chacune des pyramides : nature et nombre de faces

Pyramide à base rectangulaire	Tétraèdre

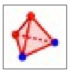
- Sur feuille blanche, construire un patron pour le tétraèdre et deux patrons identiques pour les pyramides à base rectangulaire..
- Découper, plier, coller, assembler !

Observer le solide obtenu, décrire ses faces. Quel nom donneriez-vous à un solide de cette nature ?

Le solide en un seul patron

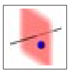
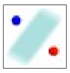
- Reprendre la construction réalisée avec GeoGebra.

Cacher ou effacer le patron réalisé précédemment.

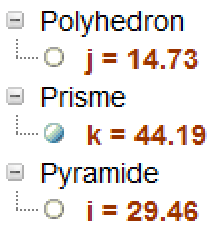


- Assembler la pyramide à base rectangulaire avec un tétraèdre collé à sa face ABF en cliquant sur la face ABF avant de sélectionner les sommets A et B.

Il manque la seconde pyramide à base rectangulaire.
Comment la construire à partir de la première ?

Deux indices :  

- Construire le prisme rassemblant les trois solides en choisissant un triangle comme base.
- Cacher chacune des trois pyramides initiales pour ne laisser affiché que le prisme. Le plus simple est de les décocher dans la fenêtre *Algèbre* →



- Construire le patron du prisme.

Quel est le volume de ce solide ?

CRÉER UNE ANIMATION 3D
REMPLIR UN PAVÉ DROIT PAR DES CUBES UNITÉS

Le pavé droit

On souhaite réaliser un pavé droit de dimensions entières modifiables par l'utilisateur
et le remplir à loisir de cubes unité :

Ouvrir une nouvelle page, y afficher une fenêtre 2D et une fenêtre 3D.
Placer un point A dans la fenêtre 3D ou saisir A=(0,0,0) par exemple.
Saisir 3 vecteurs unitaires : vx=(1,0,0) vy=(0,1,0) vz=(0,0,1) *- rappel : l'emploi de minuscules indique qu'il s'agit de vecteurs.*

Saisir les dimensions du pavé droit : L=8 l=5 et h=4
Créer les sommets du pavé : B = A + L vx C = A + L vx + l vy D = A + l vy E = A + h vz
Créer le pavé droit : monPave=Prisme[A,B,C,D,E]
On peut créer dans la fenêtre 2D trois champs de texte associés aux variables L, l et h pour modifier facilement les dimensions du pavé.

Les cubes unités

Saisir : nx=1, ny=1 et nz=1. Ces trois valeurs représentent le nombre de petits cubes à dessiner en longueur, largeur, hauteur.
Créer un premier cube unité :

c = Cube[A,A+vx]

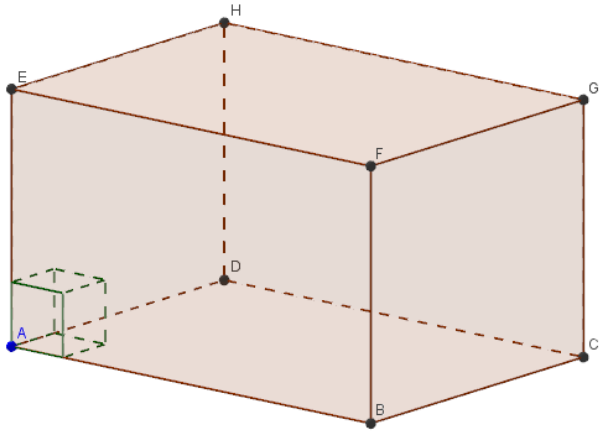
Masquer l'affichage de ce cube et de ses sommets.

Créer par translation les cubes unité, dans les 3 directions :

l1 = Séquence[Translation[c,i vx],i,0,nx-1]

l2 = Séquence[Translation[l1,i vy],i,0,ny-1]

l3 = Séquence[Translation[l2,i vz],i,0,nz-1]



Masquer l'affichage des listes l1 et l2.
Formater l'affichage de la liste l3.
Il peut être utile en particulier de placer l3 dans un calque supérieur à celui du pavé pour éviter des effets de moiré disgracieux.

Variation du nombre de cubes

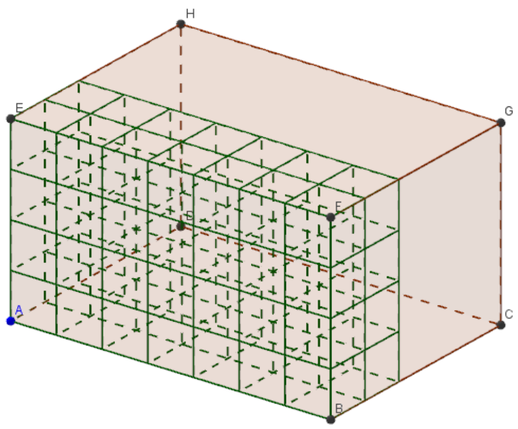
Pour piloter le remplissage du pavé, nous allons créer des boutons qui incrémentent les compteurs nx, ny, nz.

- Créer un premier bouton pour le nombre de cubes en longueur → (dans la fenêtre 2D)
- Nommer le bouton « Augmenter en longueur »
- Saisir dans le script : SoitValeur(nx,nx+1)

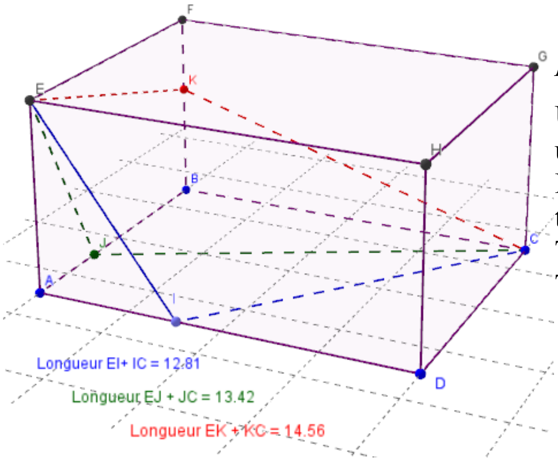
De la même façon, créer des boutons pour la largeur et la hauteur.
Ajouter un dernier bouton « Cube unité » qui réinitialise à 1 les variables nx, ny, nz.

Enregistrer le fichier.

On peut désormais remplir le cube et étudier son volume.
Le pavé est modifiable en saisissant les valeurs désirées pour L, l et h.



QUELQUES SUJETS D'ÉTUDE COMPLÉMENTAIRES

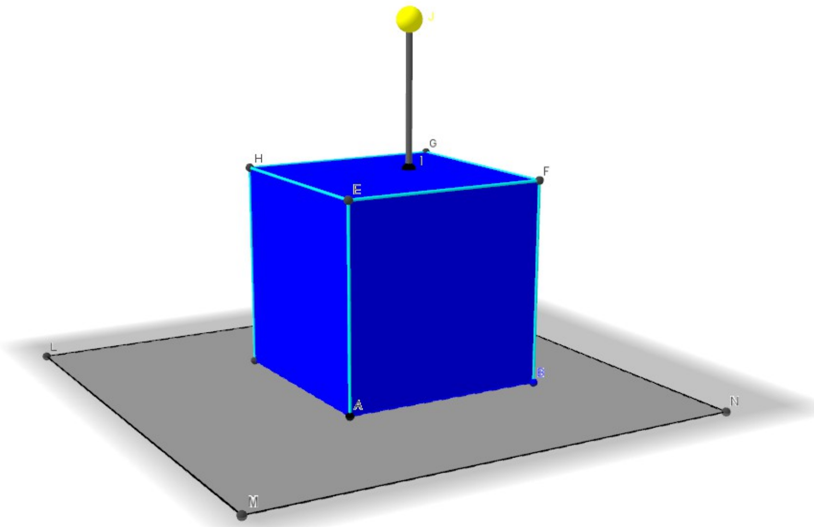


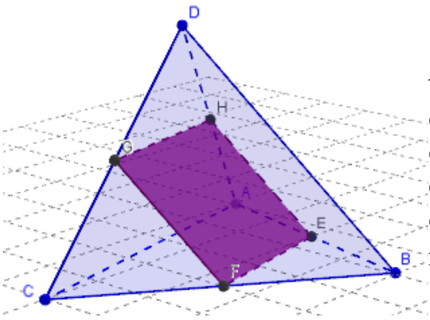
***Exercice :** plus court chemin, patron d'un pavé droit*

Une fourmi se trouve enfermée dans une boîte ABCDEFGH formant un pavé droit de dimensions AB=6 ; AD=8 et AE=4.
Elle est actuellement au sommet E et doit aller manger une miette se trouvant sur le sommet diamétralement opposé.
Tracer un chemin possible et afficher sa longueur.
Trouver le chemin le plus court. (On pourra utiliser un patron)

***Exercice :** propriété de Thalès, agrandissement*

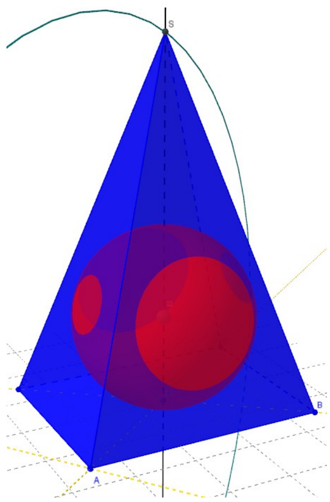
On dispose d'une table de nuit ayant une forme cubique, sur laquelle est posée une lampe de chevet. Celle-ci éclaire la table, et on observe sur le sol de la chambre l'ombre créée par la lampe. Où l'ampoule de la lampe est-elle placée, sachant que l'ombre portée autour de la base de la table de nuit a une surface huit fois égale à celle de la base de la table de nuit ?





***Exercice :** droite des milieux, nature d'un quadrilatère*

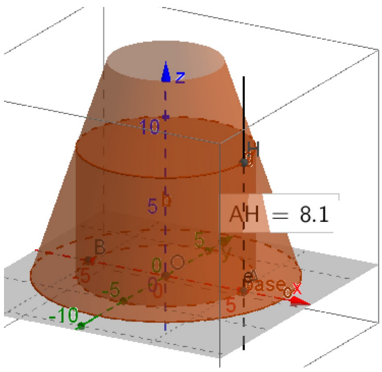
Construire un tétraèdre ABCD.
Construire les milieux E, F, G, H des segments [AB], [BC], [CD], [AD].
Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?
Comment placer les points A, B, C, D pour que le quadrilatère EFGH soit un rectangle ? un carré ?



***Exercice :** propriété de Pythagore, médiatrice, trigonométrie*

On considère une pyramide régulière SABCD de sommet S à base rectangulaire telle que AB=8 et AD=6. On sait de plus que AS=13.

1. Représenter la pyramide.
2. Construire au mieux la sphère circonscrite à la pyramide. On notera O son centre. Donner une valeur approchée du rayon de la sphère construite.
3. Proposer une démarche permettant de calculer le rayon de la sphère circonscrite à la pyramide SABCD.



***Un DM de recherche au lycée :** propriété de Thalès, volume, variation d'une fonction*

Pour les fêtes de Noël, un industriel souhaite commercialiser une boîte de friandises, constituée d'un cylindre inscrit dans un cône de hauteur 24 cm et de rayon à la base de 8 cm.
Quelles sont les dimensions du cylindre permettant d'en obtenir un volume maximal ?